Solusi Optimal Masalah Transportasi *Fuzzy* Penuh Menggunakan *Total Integral Ranking* dan *Ranking Score Method*

M Sam'an[1],

[1]Program Studi Matematika S2, Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro Jl.Prof. H.Soedarto,SH, Tembalang, Semarang, Indonesia

*Email: muhammad.92sam@gmail.com

Abstract. Masalah transportasi *fuzzy* penuh merupakan masalah transportasi dimana biaya transportasi, jumlah persediaan, jumlah permintaan dan variabel keputusan dinyatakan dalam bentuk bilangan *fuzzy*. Untuk memecahkan masalah transportasi *fuzzy* tersebut, parameter bilangan *fuzzy* harus diubah ke bilangan *crisp* yang disebut metode perangkingan bilangan *fuzzy*. Pada tulisan ini diberikan masalah transportasi fuzzy yang diselesaikan menggunakan algoritma transportasi fuzzy dengan metode perangkingan yang berbeda yaitu *total integral ranking dan ranking score method*. Algoritma Transportasi Fuzzy dengan perankingan Total integral Ranking menghasilkan solusi dan nilai optimal fuzzy yang lebih besar dibandingankan menggunakan Algoritma Transportasi Fuzzy dengan perankingan menggunakan Ranking Score Methode. Namun itersai yang diilakukan pada Algoritma Transportasi Fuzzy dengan perankingan Total integral Ranking lebih cepat dibandingkan Algoritma Transportasi Fuzzy dengan perankingan Ranking Score Method.

Kata Kunci. Bilangan *fuzzy*, Transportasi *fuzzy* penuh,*Total Integral Ranking, Ranking Score Method*

1. Pendahuluan

Masalah transportasi fuzzy penuh (FFTP) merupakan ketidakpastian biaya transportasi, jumlah permintaan dan jumlah persediaan pada masalah transportasi. Untuk menyelesaikan masalah tersebut beberapa peneliti seperti Liou dan Wang [1], Kaur dan Kumar [2], Chandran dan Kadaswamy [3], Ebrahimdinejad [5] serta Hunwisai dan Kumam [4] memberikan solusi dengan konsep perangkingan bilangan fuzzy yaitu melakukan konversi biaya transportasi, jumlah permintaan dan jumlah persediaan dalam bentuk bilangan *fuzzy* menjadi bentuk bilangan *crisp*. Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi dan nilai optimal FFTP baik pada penentuan solusi fisibel awal, yaitu metode MOMC (maximum supply with minimum cost) fuzzy [6] maupun langsung solusi akhir, yaitu diantaranya metode fuzzy zero point [7], metode fuzzy zero suffix [8], metode MODI versi fuzzy [9], metode fuzzy dual matrix approach [10], dan metode lainnya.

Pembahasan telah dilakukan sebelumnya terkait masalah transportasi fuzzy seperti Kaur dan Kumar [2] menggunakan total integral Ranking dalam perangkingan bilangan fuzzy, metode MOMC fuzzy untuk solusi fisibel dan MODI versi fuzzy untuk solusi akhir. Chandran dan Kadaswamy [3] juga menggunakan MOMC fuzzy dan MODI versi fuzzy, namun dalam pernagkingan fuzzy menggunakan Ranking Score Mathod. Sedangkan Solikhin [11] metode Fuzzy ASM untuk menyelesaikan masalah transportasi fuzzy pada kasus meminimumkan biaya atau memaksimumkan keuntungan dengan mean parameter ranking sebagai penegasan bilangan triangular fuzzy.

Selain itu, secara grafik fungsi keanggotaan bilangan *fuzzy triangular* atau *trapezoidal*, masih dapat dilakukan penambahan titik parameter diinterval bilangan *fuzzy*. Oleh karena itu, dalam tulisan ini menunjukkan penggunaan bilangan *fuzzy* baru dengan menambahkan titik parameter dari bilangan *fuzzy trapezoidal* yang mempunyai 4 titik parameter menjadi 6 titik parameter yang dikenal dengan bilangan *fuzzy hexagonal*. Tulisan ini membahas perbandingan solusi optilmal FFTP yang diselesaikan menggunakan MOMC fuzzy dan MODI versi fuzzy dengan menggunakan perangkingan fuzzy yang berbeda yaitu Ranking Score Method [3] dan Total integral ranking dengan bilangan fuzzy hexagonal.

2. Kajian Teori

Pada bagian ini disajikan beberapa definisi dasar dan*total integral ranking*.

2.1. Definisi Dasar

Difinisi 1[1]**.** Bilangan *fuzzy* real A disebut himpunan bagian dari garis bilangan real R dengan fungsi keanggotaan f_A yang memiliki sifat berikut:

a. f_A merupakan fungsi kontinu dari R ke interval tertutup $[0, w], 0 \le w \le 1$;
b. $f_A(x) = 0$, untuk setiap $x \in (-\infty, a]$;
c. f_A merupakan monoton naik pada $[a, b]$;
d. $f_A(x) = 1$ untuk setiap $x \in [b, c]$;
e. f_A merupakan monoton turunpada $[c, d]$;
f. $f_A(x) = 0$ untuk setiap $x \in (d, \infty]$;

dimana a, b, c dan d merupakan bilangan real. Kecuali didefinisikan yang lain, diasumsikan bahwa A disebut konveks, normal dan terbatas (yaitu $-\infty < a, d < \infty$).

Lebih sederhana, bilangan *fuzzy* pada Difinisi 1 dapat dinotasikan dengan $[a, b, c, d; 1]$, dan fungsi keanggotaan f_A dari bilangan *fuzzy* $\tilde{A} = [a, b, c, d; 1]$ dapat dinyatakan sebagai,

$$f_A = \begin{cases} f_A^L(x) & a \le x \le b \\ 1 & b \le x \le c \\ f_A^R(x) & c \le x \le d \\ 0 & lainnya \end{cases}$$

dimana $f_A^L : [a, b] \to [0,1]$ dan $f_A^R : [c, d] \to [0,1]$. Dari difinisi 1 sudah jelas bahwa $f_A^L(x)$ merupakan fungsi keanggotaan kiri dari bilangan *fuzzy* yang kontinu dan monoton naik pada $[a, b]$ serta $f_A^R(x)$ merupakan fungsi keanggotaan kanan dari bilangan *fuzzy* yang kontinu dan pasti monoton turun pada $[c, d]$.

2.2. Total Integral Ranking dan Ranking Score Method

Difinisi 2[1]. Misalkan himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ merupakan bilangan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan kiri f_A^L dan fungsi keanggotaan kanan f_A^R. Misalkan g_A^L merupakan invers fungsi f_A^L dan g_A^R merupakan invers fungsi f_A^R. Nilai integral kiri dan integral kanan dari $\tilde{A}$ secara berturut-turut didefinisikan sebagai berikut,

$$I_L(A) = \int_0^1 g_A^L(y)dy \text{ dan } I_R(A) = \int_0^1 g_A^R(y)dy.$$

Difinisi 3[1]. Misalkan $\tilde{A}$ merupakan bilangan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan f_A yang didefinisikan pada (1). Nilai *Total Integral Ranking* didefinisikan sebagai berikut:

$$I_T^{\alpha}(A) = \alpha I_R(A) + (1-\alpha) I_L(A) \tag{1}$$

dimana $I_R(A)$ dan $I_L(A)$ masing-masing meruapakan nilai dari integral kanan dan kiri dari $\tilde{A}$ serta α merupakan indeks optimisme dengan interval $[0,1]$.

Difinisi 5 [3]. Bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ merupakan bilangan *fuzzy triangular* dengan fungsi keanggotaan f_A dinyatakan dengan,

$$f_A = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ \dfrac{x-c}{b-c}, & b \le x \le c \\ 0, & lainya \end{cases}$$

dimana a , b dan c anggota bilangan real. Bilangan *fuzzy triangular* A dapat dinotasikan menjadi $(a,b,c;1)$.

Aksioma 1. Karena $f_A^L(x) = \dfrac{(x-a)}{(b-a)}$ dan $f_A^R(x) = \dfrac{(x-c)}{(b-c)}$, maka invers fungsi dari f_A^L dan f_A^R dapat dinyatakan menjadi $g_A^L(y) = a + (b-a)y$ dan $g_A^R(y) = c + (b-c)y$, dimana $y \in [0,1]$. Jadi

$$I_L(A) = \int_0^1 g_A^L(y)dy = \int_0^1 [a + (b-a)y]dy = \frac{1}{2}(a+b);$$

dan

$$I_R(A) = \int_0^1 g_A^R(y)dy = \int_0^1 [c + (b-c)y]dy = \frac{1}{2}(b+c).$$

Dengan demikian berdasarkan dari (1), dengan $\alpha \in [0,1]$ nilai dari *total integral ranking* bilangan *fuzzy triangular* $\tilde{A} = (a,b,c;1)$ yaitu

$$I_T^{\alpha}(A) = \frac{1}{2}[\alpha c + b + (1-\alpha)a]. \tag{2}$$

Difinisi 6 [3]. Bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ merupakan bilangan *fuzzy trapezoidal* jika fungsi keanggotaan f_A dinyatakan dengan,

$$f_A = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ \dfrac{x-d}{c-d}, & c \le x \le d \\ 0, & lainya \end{cases}$$

dimana a, b, c dan d anggota bilangan real. Bilangan *fuzzy trapezoidal* $\tilde{A}$ dapat dinotasikan menjadi $(a,b,c,d;1)$.

Aksioma 2. Karena $f_A^L(x) = \dfrac{(x-a)}{(b-a)}$ dan $f_A^R(x) = \dfrac{(x-d)}{(c-d)}$, maka invers fungsi dari f_A^L dan f_A^R dapat dinyatakan menjadi $g_A^L(y) = a + (b-a)y$ dan $g_A^R(y) = d + (c-d)y$, dimana $y \in [0,1]$. Jadi

$$I_L(A) = \int_0^1 g_A^L(y)dy = \int_0^1 [a + (b-a)y]dy = \frac{1}{2}(a+b);$$

dan

$$I_R(A) = \int_0^1 g_A^R(y)dy = \int_0^1 [d + (c-d)y]dy = \frac{1}{2}(c+d) \cdot$$

Dengan demikian berdasarkan dari (2), dengan $\alpha \in [0,1]$ nilai dari *total integral ranking* bilangan *fuzzy trapezoidal* $\tilde{A} = (a,b,c,d;1)$ yaitu

$$I_T^\alpha(A) = \frac{1}{2}[\alpha(c+d) + (1-\alpha)(a+b)] \tag{3}$$

Difinisi 7 [12]. Bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ merupakan bilangan *fuzzy hexagonal* jika fungsi keanggotaan f_A dinyatakan dengan,

$$f_A = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right), & a \le x \le b \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-b}{c-b}\right), & b \le x \le c \\ 1, & c \le x \le d \\ 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-d}{e-d}\right), & d \le x \le e \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f-x}{f-e}\right), & e \le x \le f \end{cases}$$

dimana $a \le b \le c \le d \le e \le f$ adalah bilangan riil yang memenuhi $b-a \le c-a$ dan $e-d \le f-e$.

Definisi 8 [13]. Bilangan *fuzzy trapezoidal* $\tilde{A}$ yang dinotasikan $(a,b,c,d;1)$ menjadi bilangan *fuzzyhexagonal* yang dinotasikan

$(a,(a+b)/2,b,c,(c+d)/2,d;1)$ dengan fungsi keanggotaan f_A dinyatakan sebagai berikut:

$$f_A = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{x-a}{b-a}\right), & a \le x \le (a+b)/2 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right), & (a+b)/2 \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ 1-\frac{1}{4}\left(\frac{x-c}{d-c}\right), & c \le x \le (c+d)/2 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{d-x}{d-c}\right), & (c+d)/2 \le x \le d \end{cases}$$

Bilangan *fuzzy* *hexagonal* A dinotasikan $(a,(a+b)/2,b,c,(c+d)/2,d;1)$ maka $f_A^L(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)$ dan $f_A^R(x) = 1-\frac{1}{4}\left(\frac{x-d}{d-c}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{d-x}{d-c}\right)$, maka invers fungsi dari f_A^L dan f_A^R dapat dinyatakan menjadi $g_A^L(y) = 4y(b-a)+a+\frac{1}{2}\left[(2y-1)(b-a)+(a+b)\right]$ dan $g_A^R(y) = (4y+4)(d-c)+d+d-4y(d-c)$, dimana $y \in [0,1]$. Jadi

$$I_L(A) = \int_0^1 g_A^L(y)dy = \frac{7b+a}{8};$$

dan

$$I_R(A) = \int_0^1 g_A^R(y)dy = 4(d-c)\cdot$$

Dengan demikian berdasarkan dari (1), dengan $\alpha \in [0,1]$ nilai dari *total integral ranking* bilangan *fuzzy hexagonal* $\tilde{A} = (a,(a+b)/2,b,c,(c+d)/2,d;1)$ yaitu

$$I_T^\alpha(A) = \frac{1}{8}\left[38\alpha(d-c)+(1-\alpha)(7b+a)\right] \tag{4}$$

Definisi 9 [3]. Misalkan $\tilde{A}_i = \left(a_1^i, a_2^i, ..., a_n^i\right)$, $a \le \min\left(a_1^i, a_2^i, ..., a_n^i\right)$, $b \le \max\left(a_1^i, a_2^i, ..., a_n^i\right)$

dan $a \le x_1 < x_2 < .... < x_n \le b$ dengan $i = 1,2,3,...n$. Maka *score* dari bilangan *fuzzy* $\tilde{A}_i$ didefinisikan

sebagai berikut **:**

$$Score\left(\tilde{A}_i\right) = S_i * e^{U_i} * h_i * \alpha ,$$

dengan,

$$S_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} \int_a^b x_i f_{ki} dx}{\sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_{ki} dx}; \quad i = 1,2,3,\ldots n \cdot$$

$$T_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_{ki} (x_i - S_i)^2 dx}{\sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_{ki} dx}; \quad i = 1,2,3,\ldots n \cdot$$

$$U_i = 1 - T_i e^{(-S_i)}; \quad i = 1,2,3,\ldots n .$$

dengan k adalah indeks dari polynomial berbeda yang mendefinisikan fungsi keanggotaan pada interval $[a,b]$, h_i adalah tinggi bilangan *fuzzy* $\tilde{A}_i$ dan $\alpha \in (0,1]$. Bilangan *fuzzy* dengan *score* yang lebih tinggi akan memiliki *ranking* yang lebih tinggi.

3. Masalah Transportasi *Fuzzy*

Pada masalah optimasi transportasi secara teori, parameter s_i, d_j, c_{ij} dinyatakan dalam bentuk suatu bilangan tegas (*crisp*). Namun, jika parameter s_i, d_j, c_{ij} dan x_{ij} yang dinyatakan dalam bentuk bilangan *fuzzy* $\tilde{s}_i, \tilde{d}_j, \tilde{c}_{ij}$ dan $\tilde{x}_{ij}$ maka masalah transportasi *crisp* menjadi masalah transportasi *fuzzy* (FTP) yang dapat diformulasikan sebagai berikut:

Meminimalkan: $\tilde{z} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij} \tilde{x}_{ij}$

(5)

dengan kendala:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij} \leq \tilde{s}_i , \quad i = 1,2,\ldots, m$$

(6)

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{ij} \leq \tilde{d}_j , \quad i = 1,2,\ldots, n$$

(7)

$$\tilde{x}_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \, .$$

dimana:

$$\tilde{x}_{ij} = (x_{1ij}, x_{2ij}, \ldots, x_{pij}), \tilde{c}_{ij} = (c_{1ij}, c_{2ij}, \ldots, c_{pij}), \tilde{s}_i = (s_{1i}, s_{2i}, \ldots, s_{pi}), \tilde{d}_j = (d_{1j}, d_{2j}, \ldots, d_{pj}),$$

Selanjutnya akan diberikan tentang eksistensi dari Algoritma Transportasi *Fuzzy*. Diberikan masalah transportasi *fuzzy* pada (5)-(7) yang dinotasikan FTP 1. Selanjutnya, diberikan masalah transportasi *fuzzy* dinotasikan *FTP 2* sebagai berikut:

Meminimalkan: $\tilde{z} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} I_T^{\alpha}(\tilde{c}_{ij}) \tilde{x}_{ij}$,

dengan kendala:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij} \leq \tilde{s}_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{ij} \leq \tilde{d}_j, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\tilde{x}_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \, .$$

Eksistensi dari Algoritma Transportasi *fuzzy* dapat ditunjukkan dengan dua teorema berikut.

Teorema 4. Jika $(\tilde{x}_{11}^*, \tilde{x}_{12}^*, \ldots, \tilde{x}_{ij}^*, \ldots, \tilde{x}_{mn}^*)$ adalah solusi fisibel dari FTP 2 dan $\lambda_{ij} = X_{ij} - (v_i + w_j) \geq 0, \forall i, j$ maka $(\tilde{x}_{11}^*, \tilde{x}_{12}^*, \ldots, \tilde{x}_{ij}^*, \ldots, \tilde{x}_{mn}^*)$ adalah solusi optimal dari FTP 2 dengan $X_{ij} = I_T^{\alpha}(\tilde{C}_{ij})$, v_i dan w_j adalah bilangan real.

Bukti:

Dual dari FTP 2 adalah

$$Z' = \sum_i \tilde{s}_i v_i + \sum_j \tilde{d}_j w_j$$

dengan kendala

$$v_i + w_j \leq I_T^{\alpha}(\tilde{C}_{ij}),$$

v_i, w_j tidak terbatas untuk suatu i, j

Karena $x_{ij} = I_T^{\alpha}(\tilde{C}_{ij})$, maka kendala dual dapat dituliskan menjadi

$$v_i + w_j \leq I_T^{\alpha}(\tilde{C}_{ij})$$
$$\Leftrightarrow v_i + w_j \leq x_{ij}$$

Misalkan $\tilde{x}_{ij}^* = \left(\tilde{x}_{11}^*, \tilde{x}_{12}^*, ..., \tilde{x}_{ij}^*, ..., \tilde{x}_{mn}^*\right)$.

Diketahui $\tilde{x}_{ij}^*$ solusi fisibel dari FTP 2 dan $\lambda_{ij} = x_{ij} - \left(v_i + w_j\right) \geq 0, \forall i, j$

Akan ditunjukkan $\tilde{x}_{ij}^*$ solusi optimal dari FTP 2 artinya dalam tabel simpleks FTP 2 nilai dari $z_j - c_j \leq 0, \forall i, j$. Selanjutnya diperhatikan

$$\lambda_{ij} = x_{ij} - \left(v_i + w_j\right) \geq 0, \forall i, j$$
$$\Leftrightarrow -\lambda_{ij} = -\left(x_{ij} - \left(v_i + w_j\right)\right) \leq 0, \forall i, j$$
$$\Leftrightarrow -\lambda_{ij} = v_i + w_j - x_{ij} \leq 0, \forall i, j$$

Karena nilai $v_i + w_j - x_{ij}$ pada masalah dual FTP 2 sama dengan $z_j - c_j$ maka diperoleh

$$-\lambda_{ij} = z_j - c_j \leq 0, \forall i, j$$
$$\Leftrightarrow z_j - c_j \leq 0, \forall i, j$$

Karena $\tilde{x}_{ij}^*$ solusi fisibel dari FTP 2 dan $z_j - c_j \geq 0, \forall i, j$ pada tabel simpleks maka $\tilde{x}_{ij}^*$ solusi optimal dari FTP 2.

Jadi terbukti bahwa jika $\tilde{x}_{ij}^*$ solusi fisibel FTP 2 dan $\lambda_{ij} = x_{ij} - \left(v_i + w_j\right) \geq 0, \forall i, j$ maka $\tilde{x}_{ij}^*$ adalah solusi optimal FTP 2.

Teorema 4 menjelaskan bahwa sebarang solusi fisibel FTP 2 dengan $\lambda_{ij} \geq 0, \forall i, j$ adalah solusi optimal dari FTP 2. Teorema ini menjamin bahwa penentuan kriteria optimal pada Langkah 6 dalam Algoritma Tranportasi *Fuzzy* adalah benar. Selanjutnya, solusi optimal yang diperoleh pada Langkah 6 merupakan solusi optimal dari FTP 1 yang dapat dijamin oleh teorema dibawah ini.

Teorema 5. Jika $\left(\tilde{x}_{11}^*, \tilde{x}_{12}^*, ..., \tilde{x}_{ij}^*, ..., \tilde{x}_{mn}^*\right)$ adalah solusi optimal dari FTP 2 maka $\left(\tilde{x}_{11}^*, \tilde{x}_{12}^*, ..., \tilde{x}_{ij}^*, ..., \tilde{x}_{mn}^*\right)$ adalah solusi optimal dari FTP 1.

Bukti:

Misalkan $\tilde{x}_{ij}^* = \left(\tilde{x}_{11}^*, \tilde{x}_{12}^*, ..., \tilde{x}_{ij}^*, ..., \tilde{x}_{mn}^*\right)$ adalah solusi optimal dari FTP 2 dan $\tilde{y}_{ij}^* = \left(\tilde{y}_{11}^*, \tilde{y}_{12}^*, ..., \tilde{y}_{ij}^*, ..., \tilde{y}_{mn}^*\right)$ adalah solusi optimal dari FTP 1. Jika $\tilde{x}_{ij}^*$ adalah solusi optimal FTP 2 maka untuk setiap solusi fisibel bebas linier $\tilde{y}_{ij}^*$ dari FTP 2 diperoleh

$$\sum_i \sum_j I_T^\alpha(\tilde{C}_{ij})\tilde{x}_{ij}^* \leq \sum_i \sum_j I_T^\alpha(\tilde{C}_{ij})\tilde{y}_{ij}^* \quad (8)$$

Secara sama jika $\tilde{y}_{ij}^*$ adalah solusi optimal FTP 1 maka untuk setiap solusi fisibel bebas linier $\tilde{x}_{ij}^*$ dari FTP 2 dieroleh

$$\sum_i \sum_j I_T^\alpha(\tilde{C}_{ij})\tilde{x}_{ij}^* \geq \sum_i \sum_j I_T^\alpha(\tilde{C}_{ij})\tilde{y}_{ij}^* \quad (9)$$

Berdasarlan *Ranking Score Methode* ketaksamaan (9) diperoleh

$$I_T^\alpha\left(\sum_i \sum_j \tilde{x}_{ij}^*\right) \geq I_T^\alpha\left(\sum_i \sum_j \tilde{y}_{ij}^*\right)$$

$$\Leftarrow \left(\sum_i \sum_j \tilde{x}_{ij}^*\right) \geq \left(\sum_i \sum_j \tilde{y}_{ij}^*\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_i \sum_j I_T^\alpha(\tilde{C}_{ij})\tilde{x}_{ij}^* \geq \sum_i \sum_j I_T^\alpha(\tilde{C}_{ij})\tilde{y}_{ij}^* \quad (10)$$

Berdasarkan ketaksamaan (8) dan (10) diperoleh

$$\sum_i \sum_j I_T^{\alpha}(\tilde{C}_{ij})\tilde{x}_{ij}^* = \sum_i \sum_j I_T^{\alpha}(\tilde{C}_{ij})\tilde{y}_{ij}^*$$
$$\Leftrightarrow \sum_i \sum_j \tilde{x}_{ij}^* = \sum_i \sum_j \tilde{y}_{ij}^*$$
$$\Leftrightarrow \tilde{x}_{ij}^* = \tilde{y}_{ij}^*$$

Jadi terbukti jika $\tilde{x}_{ij}^*$ adalah solusi optimal dari FTP 2 maka $\tilde{x}_{ij}^*$ adalah solusi fisibel dari FTP 1.

FTP 2 lebih mudah diselesaikan dibandingkan dengan FTP 1 karena FTP 2 adalah masalah transportasi dengan biaya angkutan berbentuk bilangan *crisp*. Oleh karena itu, dalam Algoritma Transportasi *Fuzzy* untuk menentukan solusi optimal dari FTP 1, pertama FTP 1 diubah menjadi FTP 2, selanjutnya FTP 2 ditentukan solusi optimalnya. Dengan menggunakan Teoream 5 diperoleh bahwa solusi optimal dari FTP 2 tersebut adalah solusi optimal dari FTP 1.

4. Algoritma Transportasi *Fuzzy*

Untuk mencari solusi optimal dari masalah transportasi *fuzzy*, maka berdasarkan teorema 4 dan teorema 5 dapat diselesaikan menggunakan algoritma transportasi *fuzzy*yaitu MOMC fuzzy dan MODI versi fuzzy dengan menggunakan perangkingan fuzzy yang berbeda yaitu Ranking Score Method [3] dan Total integral ranking dengan yang terdiri dari 10 langkah yaitu sebagai berikut.

Langkah 1. Jika $\sum_{i=1}^{m}\tilde{S}_i = \sum_{j=1}^{n}\tilde{D}_j$ maka FTP adalah masalah yang setimbang, jika kesamaan tidak dipenuhi maka FTP adalah masalah yang tidak setimbang. Jika FTP tidak setimbang maka FTP diubah terlebih dahulu menjadi FTP setimbang dengan menambahkan *supply* fiktif $\tilde{S}_{m+1} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ atau *demand* fiktif $\tilde{D}_{n+1} = (\theta, \vartheta, \phi, \varphi)$ yang memenuhi kondisi $0 \le \alpha \le \beta \le \gamma \le \delta$ dan $0 \le \theta \le \vartheta \le \phi \le \varphi$. Selanjutya, ditetapkan *fuzzy cost* untuk setiap sel fiktif adalah $\tilde{C}_{ij} = (0,0,0,0)$.

Langkah 2. Menghitung *fuzzy cost*menggunakan *total integral ranking* menggunakan difinisi8 dan 9

Langkah 3. Menentukan alokasi jumlah *fuzzy cost* dari sel yang memiliki biaya paling sedikit. Jika sel (i, j) memiliki nilai *total integral ranking* paling kecil, maka dialokasikan jumlah maksimum yang mungkin dari kuantitas *fuzzy* $\tilde{x}_{ij} = (x_{1ij}, x_{2ij}, x_{3ij}, x_{4ij})$ yang memenuhi semua kondisi

$$0 \le s_{1i} - x_{1ij} \le s_{2i} - x_{2ij} \le s_{3i} - x_{3ij} \le s_{4i} - x_{4ij}.$$
$$0 \le d_{1j} - x_{1ij} \le d_{2j} - x_{2ij} \le d_{3j} - x_{3ij} \le d_{4j} - x_{4ij}$$
$$0 \le x_{1ij} \le x_{2ij} \le x_{3ij} \le x_{4ij}.$$

Langkah 4. Menghitung semua sisa *demand* dan *supply* yang tersedia pada semua sel, yaitu:

$$\tilde{s}_i^1 = (s_{1i} - x_{1ij}, s_{2i} - x_{2ij}, s_{3i} - x_{3ij}, s_{4i} - x_{4ij})$$ dan
$$\tilde{d}_j^1 = (d_{1j} - x_{1ij}, d_{2j} - x_{2ij}, d_{3j} - x_{3ij}, d_{4j} - x_{4ij}).$$

Jika $\tilde{s}_i^1 = \tilde{d}_j^1 = (0,0,0,0), \forall i, j$ maka iterasi selesai. Solusi fisibel basis adalah $\tilde{x}_{ij} = (x_{1ij}, x_{2ij}, x_{3ij}, x_{4ij})$Jika tidak, maka langkah 3 diulang kembali sampai *supply* dan *demand* benar-benar terpenuhi. Nilai fungsi objektif yang bersesuaian dengan solusi fisibel basis dapat dihitung dengan persamaan (5) dengan operasi aritmatika bilangan*fuzzy*.

Langkah 5. Untuk menentukan solusi optimal, diperiksa solusi non-degenerasi. Jika solusi fisibel basis mengandung setidaknya $m+n-1$ alokasi pada posisi independent maka dilanjutkan ke langkah berikutnya. Jika tidak, maka degenerasi diselesaikan dengan memanfaatkan suatu bilangan yang sangat kecil yaitu $\tilde{\varepsilon}$, dimana bilangan tersebut hampir mendekati 0, untuk satu atau lebih dari satu sel independent maka sel yang dipilih adalah sel yang memiliki biaya transportasi minimum. Jika jumlah alokasi melebihi $m+n-1$ alokasi, maka dipilih sebarang $m+n-1$ alokasi sel independent sebagai sel-sel baris.

Langkah 6. Menentukan bilangan *crisp* v_i dan w_j sedemikian hingga x_{ij} dari $m+n-1$ sel baris yang sama dengan v_i dan w_j. Untuk memudahkan perhitungan, diambil $v_i = 0$ untuk baris yang jumlah alokasi maksimum. Selanjutnya, dihitung nilai v_i dan w_j dengan menggunakan hubungan $x_{ij} = v_i + w_j$ hanya dalam $m+n-1$ sel yang dipilih. Kemudian menentukan nilai $\lambda_{ij} = x_{ij} - (v_i + w_j)$ dari sel non basis.

Langkah 7. Jika $\lambda_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j$ maka solusi layak pada saat itu sudah optimal. Jika $\lambda_{ij} < 0,$ untuk beberapa i, j maka solusi layak pada saat itu belum optimal. Untuk mendapatkan solusi optimal, dipilih sebuah sel dengan λ_{ij} negatif terkecil. Setelah itu dibentuk lintasan tertutup dengan hanya menggunakan lintasan horizontal dan vertikal yang dimulai dari sel basis yang tidak dipilih. Lintasan hanya dapat berganti membentuk sudut pada sel basis dan jalur yang dipilih bisa melewati sel basis maupun non-basis.

Langkah 8. Menetapkan tanda $(+)$ dan $(-)$ untuk titik balik lintasan tertutup dimulai dengan $(+)$ untuk sel non-basis yang dipilih. Setelah itu, menentukan kuantitas *fuzzy set* pada sel dengan tanda $(+)$ dan $(-)$. Kuantitas *fuzzy* ditentukan dari persamaan kendala (6) dan (7)dan menyelesaikan sesuai dengan persamaan $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$ dengan $\tilde{A} = (a_1, a_2, ..., a_n), \tilde{B} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ memiliki solusi jika dan hanya jika $b_1 - a_1 \leq b_2 - a_2, b_3 - a_3 \leq b_3 - a_3, ..., b_n - a_n \leq b_n - a_n$. Solusinya adalah $\tilde{x} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n]$.

Akibat dari perubahan ini, maka akan diperoleh tabel baru.

Langkah 9. Langkah 6, 7, dan 8 diulang untuk tabel baru sampai $\lambda_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j$ sehingga hasil dari alokasi ini kemudian optimal.

Langkah 10. Menghitung nilai *fuzzy* fungsi objektif yang bersesuaian dengan alokasi optimal dengan menggunakan persaaamaan (5) dan menggunakan operasi aritmatika *fuzzy*.

5. Contoh Numerik

Diberikan Masalah transportasi *fuzzy* yang dapat dilihat pada Tabel 2.1 dibawah ini.

Tabel 2.1 Masalah transportasi fuzzysetimbang [9]

	D1	D2	D3	D4	D5	s_i
M1	(1,2,3,4)	(1,3,4,6)	(9,11,12,14)	(5,7,8,11)	(0,0,0,0)	(1,6,7,12)
M2	(0,1,2,4)	(-1,0,1,2)	(5,6,7,8)	(0,1,2,3)	(0,0,0,0)	(0,1,2,3)
M3	(3,5,6,8)	(5,8,9,12)	(5,8,9,12)	(7,9,10,12)	(0,0,0,0)	(5,10,12,17)

M4	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	(2,2,2,2)
d_j	(5,7,8,10)	(1,5,6,10)	(1,3,4,6)	(1,2,3,4)	(0,2,2,4)	

Karena $\sum_{j-1}^{8}\tilde{d}_j \neq \sum_{i-1}^{3}\tilde{s}_i$ maka masalah transportasi pada Tabel 2.1 adalah masalah transportasi setimbang, maka selanjutnya menentukan nilai total integral ranking pada setiap biaya angkutan yang dinotasikan dengan x_{ij} menggunakan persamaan (4). Hasil perhitungan tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Nilai total integral ranking masalah transportasi Tabel 2.3

	D1	D2	D3	D4	D5
M1	9.9	15.7	47.7	34.1	0
M2	5.9	1.87	25.87	5.87	0
M3	23.7	37.62	37.6	39.7	0
M4	0	0	0	0	0

Berdasarkan Tabel 2.2 tersebut di atas, kemudian menentukan solusi optimal awal menggunakan algoritma transportasi *fuzzy* yang hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.3 dan nilai optimal awal

$$Z_{\min} = (25,89,134,248)$$

Tabel 2.3 Solusi optimal fuzzy awal masalah transportasi Tabel 2.3

	D1	D2	D3	D4	D5
M1	(1,3,4,6)	(0,3,3,3)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)
M2	(0,0,0,0)	(0,1,2,3)	(1,3,4,6)	(0,1,2,3)	(0,2,2,4)
M3	(4,4,4,4)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)

M4	(0,0,0,0)	(1,1,1,1)	(0,0,0,0)	(1,1,1,1)	(0,0,0,0)

Langkahselanjutnyapemeriksaan solusi non-degenerasi pada Tabel 2.3yaitu menentukan bilangan *crisp* $u_i + v_j$ sedemikian sehingga $x_{ij} = u_i + v_j$ untuk setiap variabel basis yang hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.4 pada tahap ini dilakukan iterasi sebanyak 2 kali.

Tabel 2.4 Nilai u_i dan v_j iterasi 2

	D1	D2	D3	D4	D5	u_i
M1	9.9	15.7	47.7	34.1	0	-13.80
M2	5.9	1.87	25.87	5.87	0	-33.83
M3	23.7	37.62	37.6	39.7	0	0
M4	0	0	0	0	0	-39.70
v_j	23.70	29.50	37.60	39.70	0	

Kemudian menentukan nilai $\lambda_{ij} = x_{ij} - (u_i + v_j)$ untuk setiap variabel non-basis yang hasilnya dapat dilihat pada Tabel 2.5. Dari tabel tersebut terlihat bahwa pada iterasi 1 nilai dari $\lambda_{ij} \geq 0 \ \forall_{ij}$

	D1	D2	D3	D4	D5
M1	(1,2,2,3)	(0,4,5,6)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)
M2	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	(0,1,2,3)	(0,0,0,0)
M3	(4,5,6,7)	(0,0,0,0)	(1,3,4,6)	(0,0,0,0)	(0,2,2,4)
M4	(0,0,0,0)	(1,1,1,1)	(0,0,0,0)	(1,1,1,1)	(0,0,0,0)

Tabel 2.5. Nilai λ_{ij} iterasi 2

Tabel 2.5 dapat dilihat bahwa $\lambda_{ij} \geq 0 \ \forall_{ij}$, sehingga diperoleh solusi dan nilai optimal *fuzzy* baru pada masalah transportasi *fuzzy*. Adapun solusi optimal dapat dilihat pada Tabel 2.6. dan nilai optimal awal yaitu $Z_{\min} = (25{,}87{,}130{,}245)$

Tabel 2.6 Solusi optimal fuzzy masalah transportasi Tabel 2.1

Perbandingan solusi dan nilai optimal fuzzy menggunakan perankingan total integral ranking dengan solusi dan nilai optimal fuzzy yang dibahas oleh[3] pada masalah transportasi fuzzy yang sama dapat dilihat pada Tabel 2.8.

Tabel **2.8.**

	D1	D2	D3	D4	D5
M1	0.00	0.00	23.90	8.20	13.80
M2	16.03	6.20	22.10	0.00	33.83
M3	0.00	8.12	0.00	0.00	0.00
M4	16.00	10.20	2.10	0.00	39.70

Perbandingan solusi optimal fuzzy

Penyelesaian Masalah Transportasi	Solusi Optimal	Nilai Optimal	Ite Nor
Algoritma Transportasi Fuzzy-Ranking Score Methode [3]	$x_{11}=(1,2,2,3)$ $x_{12}=(0,4,5,9)$ $x_{22}=(0,1,2,3)$ $x_{31}=(3,4,5,6)$ $x_{32}=(1,1,1,1)$ $x_{32}=(0,2,2,4)$ $x_{33}=(0,1,1,2)$ $x_{34}=(1,2,3,4)$ $x_{35}=(0,2,2,4)$ $x_{41}=(1,1,1,1)$	$(22,83,125,236)$	

	$x_{43} = (1,1,1,1)$	
Algoritma Transportasi Fuzzy- Total integral Ranking	$x_{11} = (1,2,2,3)$ $x_{12} = (0,4,5,6)$ $x_{24} = (0,1,2,3)$ $x_{31} = (4,5,6,7)$ $x_{33} = (1,3,4,6)$ $x_{35} = (0,2,2,4)$ $x_{42} = (1,1,1,1)$ $x_{44} = (1,1,1,1)$	$(25,87,130,245)$

6. Conclusion

Tulisan ini memberikan bentuk fungsi keanggotaan bilangan *fuzzy* yang terbaru yang diperoleh dari konversi bilangan *fuzzy trapezoidal* ke bilangan *fuzzyhexagonal* yang dapat digunakan untuk *defuzzyfikasi* menggunakan metode *integral total ranking*. Selain itu juga, pada contoh masalah transportasi yang diberikan menggunakan Algoritma Transportasi Fuzzy dengan perankingan Total integral Ranking menghasilkan solusi dan nilai optimal fuzzy yang lebih besar dibandinganken menggunakan Algoritma Transportasi Fuzzy dengan perankingan menggunakan Ranking Score Methode. Namun itersai yang diilakukan pada Algoritma Transportasi Fuzzy dengan perankingan Total integral Ranking lebih cepat dibandingkan Algoritma Transportasi Fuzzy dengan perankingan Ranking Score Methode.Ranking Score Method.

.

7. Reference

[1] T S Liou and M J J Wang. 1992. Ranking fuzzy numbers with integral value. *Fuzzy Set and System*. Vol. 50. pp 247-255.https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90223-Q

[2] A Kaur and A Kumar. 2011. A new method for solving fuzzy transportation problems using ranking function. *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 35. pp 5652-5661.

[3] C Sudhagar and K Ganesan. 2012. A Fuzzy Approach to TransportOptimization Problem. *Optimisasi Enginering*. Vol.17.pp 965–980.

[4] A. Ebrahimnejad, "A simplified new approach for solving fuzzy transportation problem with generalized fuzzy numbers," *Applied Soft Computing*. Iran, vol. 19, pp. 171-176, 2014.

[5] D. Hunwisai and P. Kumam, "A method for solving a fuzzy transportation problem via Robust ranking technique and ATM," *Cogent Mathematics*. Thailand, vol. 4, pp. 1-11, 2017.

[6] Pandian, P. and Natarajan, G.. 2010. A New Algorithm for Finding a Fuzzy Optimal Solution for Fuzzy Transportation Problems. *Applied Mathematical Sciences*. Vol.4. no.2. pp 79-90.

[7] F. A. Giarcarlo, C. X. C. A. Barbara, and E. W. Volmir, "New Methodology to Find Initial Solution for Transportation Problems, a Case Study with Fuzzy Parameter," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 9, pp. 915-927, 2015.

[8] M. R. Fegade, V. A. Jadhav, and A. A. Muley, "Solving Fuzzy Transportation Problem Using Zero Suffix and Robust Ranking Methodology," *IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN*),vol. 2, pp. 36 – 39, July 2012.

[9] S. Mohanaselvi and K. Ganesan ,"Fuzzy Optimal Solution to Fuzzy Transportation Problem: A New *Approach International Journal on Computer Science and Engineering (IJCSE)*,vol. 4, pp. 367 – 375, March 2012.

[10] A. Edward Samuel and M. Venkatachalapathy, "A New Dual Based Approach for the Unbalanced Fuzzy Transportation Problem," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 6, pp. 4443-4453, April 2012.

[11] Solikhin, "Metode Fuzzy ASM pada Masalah Transportasi Fuzzy Seimbang," Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Uny, 2017

[12] D Dinagar, Stephen dan J R Kannan. 2014. On Optimal Total Cost and Optimal Order Quantity for Fuzzy Inventory Model without Shortage. *International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems*. Vol. 4. No.2 pp. 193-201.

[13] M Sam'an, et al, "Optimal solution of full fuzzy transportation problems using total integral ranking," *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 2018.